Ôn tập cuối kì Caculus II

*Ngu Ba Ly – IoT – K65*

Lớp bài toán “không khó lắm”

***Phần 1 : Tích phân Euler :***

Dạng 1 : Hàm Gamma

Dạng tổng quát của hàm Gamma :



Tính chất của hàm Gamma :

 Hàm số Gamma xác định và liên tục với mọi  Hàm số Gamma hội tụ đều với mọi  Hàm số Gamma hội tụ với mọi  .

Xét trường hợp  ta có được các kết quả sau :















Dạng 2 : Hàm Beta :

Dạng đa thức của hàm Beta :



Dạng phân thức của hàm Beta : 

Dạng lượng giác của hàm Beta : 



1 số tính chất và kết quả :

 Tính đối xứng :



 Công thức hạ bậc :







Khi đó dùng công thức hạ bậc liên tiếp ta có được :



 



Liên hệ hàm Beta và hàm Gamma :







Thường để xử lí hàm Beta ta đều đưa về xử lí hàm Gamma

1 số ví dụ :

Ví dụ 1 : Tính : 

Ta liên tưởng tới dạng tổng quát của hàm Gamma : 

Vì thế nên ta sẽ chuyển tích phân cần tính về dạng của hàm Gamma :

Đặt : 

Khi đó tích phân cần tính trở thành :



Ví dụ 2 : Tính tích phân : 

Đây nà hàm Beta dạng phân thức : 

Như vậy mẫu số phải có dạng lũy thừa của đa thức bậc nhất  , vì thế nên ta sử dụng phép đổi biến :



Khi đó tích phân trên được viết lại :



Để tính  ta sẽ chuyển về hàm gamma thông qua đẳng thức :





Ví dụ 3 : Tính tích phân : 

Liên tưởng đến dạng phát biểu của hàm Gamma :



Ta phải làm xuất hiện lũy thừa cơ số  bằng cách viết lại : 

Giải : viết lại tích phân đã cho về : 

Từ đây sử dụng phép đổi biến :



Khi đó tích phân trở thành :



Ví dụ 4 : 

Dạng hàm Beta dạng phân thức : 

Ta phải đưa mẫu số về lũy thừa của hàm bậc nhất  :

Đổi biến : 

Khi đó tích phân trên trở thành : 

Ví dụ 5: Tính tích phân: 

Để ý cận tích phân là cận từ  nên dạng tích phân ở đây phải là hàm beta dạng đa thức : 

Viết lại tích phân đã cho về thành :



Đổi biến : 

Khi đó tích phân đã cho trở thành :



Ví dụ 6: Tính tích phân : 

Dạng hàm Beta dạng đa thức : 

Sử dụng phép đổi biến :



Viết lại tích phân :





Ví dụ 7: Tính tích phân : 

Đây là dạng hàm Beta dạng lượng giác :



Hay : 

Viết lại tích phân đã cho thành :



Ví dụ 8 : Tính tích phân : 

Với bài này để ý có cận vô cực nên phải đổi biến thích hợp để đưa cặp cận về  để xem xem nó ở dạng nào ?

Đặt 

Viết lại tích phân đã cho thành :



Ví dụ 9 : Tính giới hạn : 

Biểu thức tích phân có thể đưa được về dạng hàm Beta dạng phân thức 

Đổi biến :  khi đó viết lại giới hạn cần tính :



Ví dụ 10 : Tính : 

Ta sẽ liên tưởng đến hàm Gamma : 

Viết lại tích phân đã cho thành :



Xử lí tích phân :  :

Đặt 

Xử lí tích phân 

Đặt 

Khi đó : 

*\* Xây dựng 1 số bài toán tính nhanh:*



Việc chứng minh hai công thức này nhường cho các bạn dzay :>

***Phần 2 : Lý thuyết trường***

 Trường vô hướng :

Xét không gian  là 1 tập con mở của  . 1 ánh xạ  cho bởi :

 được gọi là 1 trường vô hướng trên .

Ví dụ : Cho hàm số ba biến số : 

 Trường vector :

Xét không gian  là 1 tập con mở của  . 1 ánh xạ  cho bởi :

 được gọi là 1 trường vector trên .

Ví dụ : Cho hàm vector ba thành phần tọa độ : 

Như vậy mỗi tọa độ của trường vector là 1 trường vô hướng

 Vector Rota :

Xét trường vector 

Vector Rota ( vector xoáy ) của trường  là vector có tọa độ :

 kí hiệu :  (từ kí hiệu này ta thấy : ẩn của  phải là 1 trường vector )

Dạng định thức cấp 3 : 

Nếu :  :  là điểm xoáy thuận và ngược lại .

 Mặt đồng mức của trường vô hướng  là quỹ tích những điểm  thỏa mãn phương trình :  trong đó  là hằng số

 Đạo hàm theo hướng

Xét trường vô hướng  trên  ;  ;  là 1 vector pháp tuyến đơn vị trong  .

Nếu tồn tại giới hạn : 

Thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm theo hướng  tại  của trường 

Kí hiệu : 

Với  là 1 vector bất kì khác vector 0  Trực chuẩn hóa  thành : 

Khi đó ta viết lại giới hạn trên thành : 

 Biểu thức đạo hàm theo hướng vector pháp tuyến  bất kì tại  của trường :



Trong đó : 

Ý nghĩa của đạo hàm theo hướng  tại 1 điểm của trường vô hướng : biểu hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng tại điểm đó theo hướng 

Đặc biệt : nếu hướng lấy đạo hàm trùng với hướng của các trục tọa độ thì đạo hàm theo hướng sẽ là các đạo hàm riêng .

Lưu ý : khi tính đạo hàm theo hướng  của trường vô hướng thì cần kiểm tra xem vector  đã là vector đơn vị hay chưa ? Nếu không thì phải trực chuẩn hóa vector 

 Gradient : giả sử trường vô hướng  khả vi tại điểm  , khi đó : Gradient của trường vô hướng  tại điểm  là một vector có tọa độ là các đạo hàm riêng của trường vô hướng  . Kí hiệu vector gradient của trường  tại  : 



Khi đó ta có thể viết lại biểu thức đạo hàm theo hướng vector pháp tuyến  bất kì tại  của trường :



Khai triển tích vô hướng , ta có :





Do  , thế nên theo hướng 

Trường  biến thiên tại  tăng nhanh nhất nếu song song cùng hướng với . 

Trường  biến thiên tại giảm nhanh nhất nếu song song ngược hướng với . 

*Tính chất của vector gradient :*

Từ định nghĩa của vector gradient ta thấy vector gradient chính là 1 trường vector .

Xét trường  có các đạo hàm riêng liên tục

Khi đó ta có 1 số phép toán sau :









1 số tính chất của vector gradient với vector rota



 (trong đó :  là 1trường vector)

Sử dụng định nghĩa của vector rota kết hợp với phép toán đạo hàm của tích vô hướng :



 Thông lượng : Cho  là một mặt phẳng định hướng có diện tích ,  là 1 trường vector không đổi ,  là 1 vector pháp tuyến đơn vị ( hoặc vector pháp tuyến được trực chuẩn hóa ) của mặt  ; khi đó thông lượng của trường  đi qua mặt cong  là đại lượng có giá trị bằng :



Chia mặt  thành các mảnh nhỏ rồi lấy tổng vô hạn ta được 1 dạng khác:

 ( tích phân mặt loại 1)

Khai triển tích vô hướng : 

Trong đó : 

Theo công thức hình chiếu :  ta có được :



( trong đó  là diện tích của các mảnh chữ nhật : là hình chiếu của mảnh  trên các mặt phẳng tương ứng )

Khi đó ta viết lại biểu thức thông lượng :

 (đây nà dạng tích phân mặt loại 2 )

 Lưu số (hoàn lưu) : Lưu số của trường vector  dọc theo đường kín  (có phương trình vector: ) là tích phân đường loại 2 : 

Theo công thức Stokes : Lưu số của của trường vector  dọc theo đường kín  bằng thông lượng của vector  đi qua mặt  có đường giới hạn là :



Chú ý 1: Hướng của vector pháp tuyến đơn vị của  và hướng của đường cong khép kín  tuân theo quy tắc bàn tày phải : nếu  hướng lên thì hướng của đường cong là hướng ngược chiều kim đồng hồ và ngược lại :>

Như vậy đề bài phải cho biết hướng của 1 loại để biết được hướng của loại còn lại!

Thường thì bài toán sẽ cho đường  hướng dương tức nà hướng ngược chiều kim đồng hồ thì từ đây mình có thể biết được vector pháp tuyến đơn vị hướng lên ~

Chú ý 2 ( king nghiệm ) : Vậy thì  là phần biên giao của 2 mặt đã biết rồi vậy thì nên chọn mặt  là mặt nào ?? Theo kinh nghiệm của tớ với bài toán mặt phẳng giao mặt cong thì chọn phương trình của  là phương trình mặt phẳng , còn khó hơn là giao của 2 mặt cong thì có thể phương trình của  phải lấy theo phương trình của 1 trong 2 mặt !

Điều kiện cần và đủ để lưu số không phụ thuộc đường đi :



Khi đó biểu thức  sẽ là 1 vi phân toàn phần của 1 hàm số  , và hàm này được xác định qua biểu thức :



 Trường thế :

Xét trường vector :  . Nếu tồn tại một hàm số :  sao cho :

 thì : trường vector  được gọi là trường thế và hàm  được gọi là hàm thế vị (thế vô hướng)



Từ đó suy ra biểu thức :  là 1 biểu thức vi phân toàn phần của hàm số  . Điều này chỉ xảy ra khi :  như đã nói ở trên

Và khi đó việc xác định hàm thế vị cũng như trên :



Như vậy việc xác định điều kiện để lưu số khôgn phụ thuộc đường đi cũng là điều kiện để trường vector  là 1 trường thế , đều là 

 Đive của 1 vector : Đive của 1 vector :  , trong đó các biểu thức  có các đạo hàm riêng liên tục , là đại lượng tổng các đạo hàm riêng :

 . Kí hiệu là 

 1 số tính chất của 







 ( là 1 trường vector )

 thì trường  được gọi là trường ống

 : M là điểm nguồn

 : M là điểm rò (điểm hút)

Phát biểu lại công thức Ostrogradsky :

Thông lượng của trường vector  đối với mặt cong kín định hướng  hướng ra ngoài sẽ bằng tích phân bội 3 của  trong miền  giới hạn bởi 



( dấu  nếu  hướng ra ngoài , dấu  nếu  hướng vào trong)

Nhớ nà mún sử dụng công thức Ostrogradsky thì mặt  đã cho phải làm mặt kín !

Nếu mặt  chưa kín thì cần bổ sung rồi tí nhớ mà bù trừ !

1 số bài tập ví dụ :

Pro.1 : Tìm vector xoáy và div của trường vector sau : 

Điều kiện xác định  , như vậy các biểu thức tọa độ của trường là các hàm khả vi mọi cấp , khi đó :

Vector xoáy của trường vector đã cho :



Đive của trường vector đã cho :



Pro.2 : Trường sau có phải trường thế không ? Tìm hàm thế vị .



Để kiểm tra 1 trường vector là trường thế hay không thì chỉ cần kiểm tra vector rota của trường vector đó .

Tọa độ trường vector đã cho : 

Các biểu thức tọa độ của trường vector đã cho khả vi tại mọi cấp

Khi đó vector rota của trường vector đã cho là :



Như vậy trường vector đã cho không phải trường thế !



Tọa độ của trường vector đã cho 

Các biểu thức tọa của trường vector đã cho khả vi tại mọi cấp

Khi đó vector rota của trường vector đã cho là :



Như vậy trường vector đã cho là trường thế

Khi đó hàm thế vị được xác định như sau :



Như vậy hàm thế vị là : 

Pro.3 : Tính lưu số của trường vector :  dọc theo đường tròn  giới hạn bởi mặt cầu :  theo chiều dương

Đầu tiên : Xác định hướng của đường cong kín  : bài ni  đi theo chiều dương nên nà hướng  là hướng ngược chiều kim đồng hồ , theo quy tắc nắm tay phải ta có được hướng của vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt  bị giới hạn bởi đường  nà hướng lên trên ! Mặt  ở đây là đường tròn  có phương trình mặt phẳng:  ( tức  là giao của mặt phẳng và mặt cong )

Áp dụng công thức Stokes : 



Do vector pháp tuyến đơn vị của mặt  hướng lên thế nên chọn vector pháp tuyến đơn vị của mặt  được xác định :



Ở đây mình trực chuẩn hóa nó về vector đơn vị để phòng bị cho việc tính tích phân mặt loại 2 kia bằng cách chuyển về tích phân mặt loại 1 , chứ nếu tích phân mặt loại 2 kia dạng đơn cụm nên chúng mình chỉ cần đưa về tích phân kép và chỉ cần biết hướng của  thôi , không cần biết chính xác tọa độ của nó !

Xử lí tích phân mặt loại 2 :



Do vector pháp tuyến đơn vị hướng lên ( tức nà hợp với chiều dương trục  1 góc nhọn ) nên dấu tích phân là dấu dương .

Chuyển tích phân về tích phân kép :

 với miền : 

Sử dụng đổi biến trong tọa độ cực :



Thay lại biểu thức lưu số :



Pro.4 : Tìm hàm thế vị nếu có : 

Tọa độ của trường vector đã cho : 

Các biểu thức tọa độ của trường vector đã cho đều là các hàm khả vi tại mọi cấp

Khi đó vector rota của trường vector đã cho là : 

Như vậy trường vector đã cho là 1 trường thế ~

Xác định hàm thế vị :

  

Vậy hàm thế vị tìm được nà : 

Pro.5 : Tính lưu số của trường vector  dọc theo chu tuyến kín  :

 , hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương .

 chu tuyến kín  giới hạn mặt  có vector pháp tuyến đơn vị dương hướng lên về phía dương trục 

Áp dụng công thức Stokes :



Xác định vector pháp tuyến đơn vị của mặt  :



Chuyển tích phân cần tính về tích phân mặt loại 1 :

 



Pro.6 : Cho trường vector  . Tìm những điểm trong trường đã cho là điểm xoáy .

Điều kiện để 1 điểm  trong trường vector là 1 điểm xoáy là :



Tọa độ của trường vector đã cho : 

Khi đó vector rota của trường vector đã cho tại điểm  bất kì thuộc trường vector đó là : 

Để trường điểm  là điểm không xoáy thì :





Gộp bộ nghiệm ta được bộ 

Như vậy để  là điểm xoáy thì tọa độ của  phải thuộc tập bù 2 họ nghiệm trên đối với  .

Pro.7 : Tính đạo hàm theo hướng  của hàm số :  tại điểm .

Trực chuẩn hóa vector  thành : 

Khi đó biểu thức đạo hàm theo hướng của hàm số đã cho tại điểm  bất kì:



Trong đó : 



Pro.8 : Tính lưu số của  dọc theo đường cong  là giao của mặt  và mặt  hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ chiều dương của trục .

Tọa độ của trường vector đã cho là



Các biểu thức tọa độ của trường vector đã cho là các hàm khả vi tại mọi cấp trên .

Áp dụng công thức Stokes :



  

Xử lí tích phân 

Do đường cong  có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ chiều dương của trục  thế nên hướng của vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt  bị giới hạn bởi đưởng cong  sẽ hướng lên trên , về phía dương trục .

Xác định vector pháp tuyến đơn vị dương của :



Chuyển tích phân cần tính về tích phân mặt loại 1 :

  

Với : 

Pro.9 : Tính tích phân đường :  , trong đó  là giao của mặt cầu :  với mặt nón  với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc .

Áp dụng công thức Stokes :

  

Trong đó  là giao của 2 mặt cong , xác định từ hệ  😊 và cái hệ này khó giải được , nhưng để ý rằng nón kia có dạng “âm” và để ý nốt phần mặt giao là phần mặt cầu nằm trong nón nên ta sẽ chọn phương trình  phương trình cầu dưới (không nằm trên mặt phẳng ) 

Khi đó khi nhìn từ  từ hướng đường cong theo chiều kim đồng hồ nên vector pháp tuyến hướng xuống dưới , tức tạo với chiều dương trục  1 góc tù

Xử lý tích phân : 

Khi đó ta chọn vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt đã cho là : 

Chuyển tích phân cần tính về tích phân mặt loại 1 :

với 

Vậy cách làm 1 bài lưu số :

Hướng 1 : Biết được phương trình tham số của  trong không gian  Xử lý như xử lý tích phân đường loại 2 trong không gian bằng cách tham số hóa hoy !

Hướng 2 : Sử dụng công thức Stokes :

Khi sử dụng công thức Stokes mình sẽ phải tính lưu số thông qua tích phân mặt loại 2 của vector rota của trường vector đã cho . Và để tính tích phân mặt loại 2 này mình cũng có khá nhiều hướng : Chuyển về tích phân kép trực tiếp ; chuyển về tích phân mặt loại 1 ; Sử dụng công thức Ostrogradsky ; …

Nhưng thường sẽ sử dụng 2 cách đó là chuyển về tích phân kép trực tiếp ( xử lí từng cụm tọa độ của vector rota) hoặc chuyển về tích phân mặt loại 1.

Cả 2 cách đều phải sử dụng hướng của vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt  có đường biên  , việc xác định hướng của pháp vector này sẽ dựa trên quy tắc nắm tay phải :  ngược chiều kim đồng hồ thì vector pháp hướng lên và ngược lại.

Với cách chuyển về tích phân kép trực tiếp ta chỉ cần biết hướng của vector pháp mà không cần biết hẳn tọa độ của nó để xác định được dấu tích phân : 

Với cách chuyển về tích phân mặt thì cần phải biết hẳn được tọa độ vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt  . Cách để lấy chính xác tọa độ vector pháp tuyến đơn vị dương : Đưa mặt  về dạng  , xác định vector “giả” : 

Nếu từ giả thiết ta có được hướng của vector pháp tuyến đơn vị dương là hướng lên trên khi nhìn về chiều dương  tức tạo với chiều dương  1 góc nhọn thì chọn vector giả là : 

Còn nếu là hướng xuống khi nhìn về chiều dương  tức tạo với chiều dương  1 góc tù thì chọn vector giả là 

Bước thứ 2 : Trực chuẩn hóa vector giả !

Bước 3 : chuyển về tích phân mặt loại 1 thôi :>

Pro.10 : Cho trường vector :  . Tính thông lượng của  qua mặt ngoài: .

Để tính thông lượng thì viêc đầu tiên là phải xác định được nên đưa nó về dạng gì :

Dạng tích phân mặt loại 1 : 

Hay là dạng tích phân mặt loại 2 : 

Ở bài này thì mặt  cho ở dạng thế kia vẫn chưa định hình được vector pháp tuyến nên tớ chuyển về tích phân mặt loại 2 đã nha .



Đặt : 

Xác định miển vật thể xác định bởi  . Đó chính là miền vật thể  được giới hạn bởi 8 mặt ( theo cách phá trị tuyệt đối ) nên nà miền kín !

Do miền vật thể  bị giới hạn bởi  là miền kín nên miền giới hạn bởi mặt đã cho cũng phải là 1 miền kín !

Xác định miền vật thể : với cách phá trị đối thì phương trình của  sẽ được tách làm 8 trường hợp phương trình con là các mặt cùng với mặt phẳng  tạo thành biên của các vật thể như nhau .Tức vật thể  được giới hạn bởi  được chia thành 8 phần bằng nhau.

Áp dụng công thức Ostrogradsky vởi mặt  hướng ra ngoài





Trong đó miền con  đơn giản nhất : 